

# Sommaire

## **1 Exercice**

1.1 Sujet

1.2 Corrigé

## **2 Exercice**

2.1 Sujet

2.2 Corrigé

## **3 Exercice**

3.1 Sujet

3.2 Corrigé

# 1 Exercice

## 1.1 Sujet

Soit  $(u_n)$  la suite de nombres réels définies par  $u_n = n^2 - 10n - 9$  pour tout entier naturel  $n$ .

- a) Calculer  $u_{n+1} - u_n$ .
- b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante à partir du rang 5.
- c) A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite  $(u_n)$ .
- d) Résoudre l'inéquation  $u_n \geq 5000$ .
- e) Ecrire une fonction python *seuil*( $A$ ) qui, pour tout nombre réel  $A \geq 0$  détermine le plus petit rang  $n$  à partir duquel  $u_n \geq A$ .

## 1.2 Corrigé

Soit  $(u_n)$  la suite de nombres réels définies par  $u_n = n^2 - 10n - 9$  pour tout entier naturel  $n$ .

a) Calculons  $u_{n+1} - u_n$ .

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= [(n+1)^2 - 10(n+1) - 9] - (n^2 - 10n - 9) \\&= n^2 + 2n + 1 - 10n - 10 - 9 - n^2 + 10n + 9 \\&= n^2 - n^2 + 2n - 10n + 10n + 1 - 10 + 9 - 9 \\&= 2n - 9\end{aligned}$$

b) Dédisons-en que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante à partir du rang 5.

Etudions le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n > 0 &\Leftrightarrow 2n - 9 > 0 \\&\Leftrightarrow 2n > 9 \\&\Leftrightarrow n > 4.5 \\&\Leftrightarrow n \geq 5 && (\text{car } n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque  $n \geq 5$ , on a  $u_{n+1} > u_n$ , de telle sorte que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante à partir du rang 5.

c) A l'aide de la calculatrice, conjecturons la limite de la suite  $(u_n)$ .

| n   | $u_n$  |
|-----|--------|
| 130 | 15 591 |
| 131 | 15 842 |
| 132 | 16 095 |
| 133 | 16 350 |
| 134 | 16 607 |
| 135 | 16 866 |
| 136 | 17 127 |

| n    | $u_n$     |
|------|-----------|
| 1000 | 989 991   |
| 1001 | 991 982   |
| 1002 | 993 975   |
| 1003 | 995 970   |
| 1004 | 997 967   |
| 1005 | 999 966   |
| 1006 | 1 001 967 |

Conjecture

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

d) Résolvons l'inéquation  $u_n \geq 5000$ .

$$u_n \geq 5000 \Leftrightarrow n^2 - 10n - 9 \geq 5000$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 10n - 5009 \geq 0$$

Etudions le signe du polynôme du second degré  $x^2 - 10x - 5009$ .

Le discriminant de  $x^2 - 10x - 5009$  est

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times (-5009) = 20136$$

Puisque  $\Delta > 0$ ,  $x^2 - 10x - 5009$  admet 2 racines

$$\begin{aligned} s &= \frac{-(-10) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = 5 - \sqrt{5034} \sim -65.9 \\ s' &= \frac{-(-10) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = 5 + \sqrt{5034} \sim 75.9 \end{aligned}$$

et on a le tableau de signes

| $x$                | $-\infty$ | $s$ | $s'$ | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|-----|------|-----------|
| $x^2 - 10x - 5009$ | +         | 0   | 0    | +         |

Par suite

$$u_n \geq 5000 \Leftrightarrow n^2 - 10n - 5009 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq s'$$

$$\Leftrightarrow n \geq 76 \quad (\text{car } n \in \mathbb{N})$$

- e) Ecrivons une fonction python *seuil*(A) qui, pour tout nombre réel  $A \geq 0$  détermine le plus petit rang  $n$  à partir duquel  $u_n \geq A$ .

```

1 from math import *
2 def seuil(A):
3     n=0
4     u=-9 # u=u0
5     while u<A:
6         n=n+1
7         u=n**2-10*n-9 # u=un
8     return n

```

## 2 Exercice

### 2.1 Sujet

Soit  $(v_n)$  la suite de nombres réels définies par  $v_0 = 3$  et  $v_{n+1} = 4v_n^2 - 3v_n + 1$  pour tout entier naturel  $n$ .

- a) Déterminer les termes  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  en faisant apparaître le détail des calculs.
- b) Montrer que  $v_{n+1} - v_n = (2v_n - 1)^2$ .
- c) En déduire le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .

## 2.2 Corrigé

Soit  $(v_n)$  la suite de nombres réels définies par  $v_0 = 3$  et  $v_{n+1} = 4v_n^2 - 3v_n + 1$  pour tout entier naturel  $n$ .

a) Déterminons les termes  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  en faisant apparaître le détail des calculs.

$$\begin{aligned}v_1 &= 4v_0^2 - 3v_0 + 1 = 4 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1 = 28 \\v_2 &= 4v_1^2 - 3v_1 + 1 = 4 \times 28^2 - 3 \times 28 + 1 = 3053 \\v_3 &= 4v_2^2 - 3v_2 + 1 = 4 \times 3053^2 - 3 \times 3053 + 1 = 37\,274\,078\end{aligned}$$

b) Montrons que  $v_{n+1} - v_n = (2v_n - 1)^2$ .

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= (4v_n^2 - 3v_n + 1) - v_n \\&= 4v_n^2 - 4v_n + 1 \\&= (2v_n)^2 - 2 \times (2v_n) \times 1 + 1^2 \\&= (2v_n - 1)^2\end{aligned}$$

c) Déduisons en le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .

Puisque

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t^2 \geq 0$$

on obtient

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad (2v_n - 1)^2 &\geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n &\geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &\geq v_n\end{aligned}$$

de telle sorte que la suite  $(v_n)$  est croissante.

## 3 Exercice

### 3.1 Sujet

Soit  $(w_n)$  la suite de nombres réels définies par  $w_n = \frac{2n+3}{4n+5}$  pour tout entier naturel  $n$ .

- a) Calculer  $w_{n+1} - w_n$ .
- b) En déduire que la suite  $(w_n)$  est strictement décroissante.
- c) A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite  $(w_n)$ .
- d) Résoudre l'inéquation  $w_n < 0.501$ .
- e) Ecrire une fonction python *seuil*( $A$ ) qui, pour tout nombre réel  $A > 0.5$  détermine le plus petit rang  $n$  à partir duquel  $w_n < A$ .

## 3.2 Corrigé

Soit  $(w_n)$  la suite de nombres réels définies par  $w_n = \frac{2n+3}{4n+5}$  pour tout entier naturel  $n$ .

a) Calculons  $w_{n+1} - w_n$ .

$$\begin{aligned}
 w_{n+1} - w_n &= \frac{2(n+1)+3}{4(n+1)+5} - \frac{2n+3}{4n+5} \\
 &= \frac{2n+5}{4n+9} - \frac{2n+3}{4n+5} \\
 &= \frac{(2n+5)(4n+5) - (2n+3)(4n+9)}{(4n+5)(4n+9)} \\
 &= \frac{[8n^2 + 10n + 20n + 25] - [8n^2 + 18n + 12n + 27]}{(4n+5)(4n+9)} \\
 &= \frac{[8n^2 + 30n + 25] - [8n^2 + 30n + 27]}{(4n+5)(4n+9)} \\
 &= \frac{25 - 27}{(4n+5)(4n+9)} \\
 &= \frac{-2}{(4n+5)(4n+9)}
 \end{aligned}$$

b) Dédisons en que la suite  $(w_n)$  est strictement décroissante.

Puisque  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $n \geq 0$  d'où  $4n+5 \geq 5 > 0$  et  $4n+9 \geq 9 > 0$ .

Par suite

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} - w_n &< 0 \\
 \forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} &< w_n
 \end{aligned}$$

de telle sorte que la suite  $(w_n)$  est strictement décroissante.

c) A l'aide de la calculatrice, conjecturons la limite de la suite  $(w_n)$ .

| n | $u_n$        |
|---|--------------|
| 0 | 0.6          |
| 1 | 0.5555555556 |
| 2 | 0.5384615385 |
| 3 | 0.5294117647 |
| 4 | 0.5238095238 |
| 5 | 0.52         |
| 6 | 0.5172413793 |

| n   | $u_n$        |
|-----|--------------|
| 100 | 0.5012345679 |
| 101 | 0.5012224939 |
| 102 | 0.5012106538 |
| 103 | 0.5011990408 |
| 104 | 0.5011876485 |
| 105 | 0.5011764706 |
| 106 | 0.5011655012 |



Conjecture.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.5$$

d) Résolvons l'inéquation  $w_n < 0.501$ .

$$\begin{aligned} w_n < 0.501 &\Leftrightarrow \frac{2n+3}{4n+5} < 0.501 \\ &\Leftrightarrow \frac{2n+3}{4n+5} \times (4n+5) < 0.501 \times (4n+5) & (*) \\ &\Leftrightarrow 2n+3 < 2.004n + 2.505 \\ &\Leftrightarrow 2n - 2.004n < 2.505 - 3 \\ &\Leftrightarrow -0.004n < -0.495 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{-0.495}{-0.004} \\ &\Leftrightarrow n > 123.75 \\ &\Leftrightarrow n \geq 124 & (\text{car } n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

(\*) (On conserve l'ordre strict car  $4n+5 > 0$ )

e) Ecrivons une fonction python *seuil*(*A*) qui, pour tout nombre réel  $A > 0.5$  détermine le plus petit rang  $n$  à partir duquel  $w_n < A$ .

```
1 from math import *
2 def seuil(A):
3     n=0
4     w=0.6 # w=w0
5     while w>=A:
6         n=n+1
7         w=(2*n+3)/(4*n+5) # w=wn
8     return n
9
10 print(seuil(0.500001))
```